Prof. Dipl.-Ing. Edgar Neuherz

MATHEMATIK 4

Mathematik und angewandte Mathematik

HAK

lizensiert für:

DI Edgar Neuherz

Arbeitsblätter

Mathematik 4

(2013-05-23 0:22)

Schuljahr 2012/13

Verantwortlich für den Inhalt
Dipl.-Ing. Edgar Neuherz

Graz, 2013

Wir weisen darauf hin, dass das Kopieren zum Schulgebrauch verboten ist - § 42 Absatz(6) der Urheberrechtsgesetznovelle 2003:

„Die Befugnis zur Vervielfältigung zum eigenen Schulgebrauch gilt nicht für Werke, die ihrer Beschaffenheit und Bezeichnung nach zum Schul- oder Unterrichtsgebrauch bestimmt sind.“

ISBN
www.neo-lernhilfen.at
hak.neo-lernhilfen.at

E-Mail an neo.verlag@me.com

Inhaltsverzeichnis

Teil IV.

Analysis

1. Grundbegriffe der Differentialrechnung

Die Schülerinnen und Schüler ...

- ☐ können den Differenzenquotient (die mittlere Änderungsrate) erklären und interpretieren
- ☐ können den Differentialquotient (die Änderungsrate) erklären und interpretieren
- ☐ kennen die Leibniz'sche Schreibweise für den Differenzen- und Differentialquotient
- ☐ können die Begriffe Tangente und Sekante erklären
- ☐ können den Begriff der Tangente als Grenzlage von Sekanten erklären
- ☐ können Steigungen in Funktionsgraphen interpretieren
- ☐ kennen die Ableitungsregeln für Polynomfunktionen und können diese auch anwenden
- ☐ können höhere Ableitungen für Polynomfunktionen berechnen

1.1. Differenzenquotient und Differentialquotient

1.1.1. Einführendes Beispiel

Beispiel 1.1: Einführendes Beispiel I

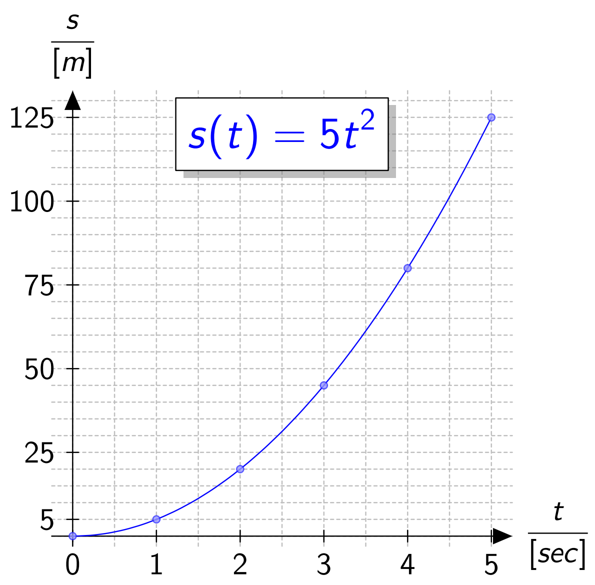
Beim Bungee-Jumping befindet sich der Springer im freien Fall (Luftwiderstand vernachlässigt). Für den Weg $s(t)$, den ein Körper beim freien Fall zurücklegt, gilt näherungsweise $s(t) = 5t^2$ (t in Sekunden, s in Meter).

a Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Springers im Zeitintervall $[1; 4]$!

b Gib eine Formel für die mittlere Geschwindigkeit des Springers im Zeitintervall $[t; z]$ an!

c Wie groß ist die Geschwindigkeit des Springers zum Zeitpunkt 3?

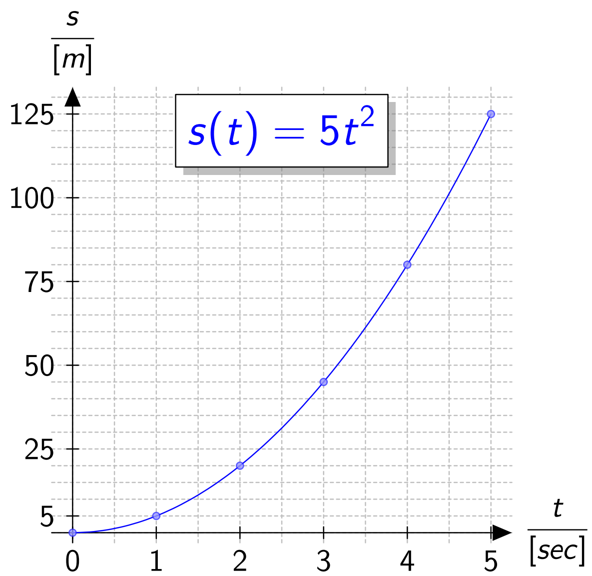
a Mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[1; 4]$!



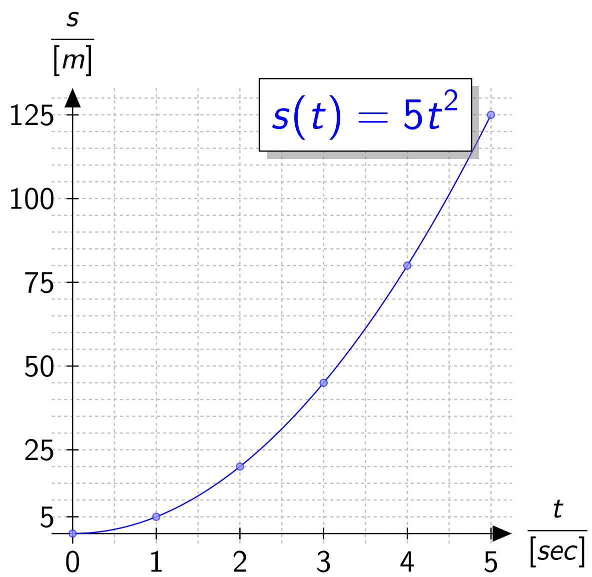
! Die im Zeitintervall $[\mathbf{t1}; \mathbf{t2}]$ berechnet man mit

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{t1}; \mathbf{t2}) = \frac{\mathbf{s(t_2) - s(t_1)}}{\mathbf{t_2 - t_1}}$$

b Gib eine Formel für die mittlere Geschwindigkeit des Springers im Zeitintervall $[t;z]$ an!



c Wie groß ist die Geschwindigkeit des Springers zum Zeitpunkt 3?



Die zum Zeitpunkt $\mathbf{t_0}$ berechnet man mit

$$\mathbf{v(t)} = \lim_{\mathbf{z \to t}} \mathbf{\overline{v}(t;z)} = \lim_{\mathbf{z \to t}} \frac{\mathbf{s(z) - s(t)}}{\mathbf{z - t}}$$

Diese wird auch als zum Zeitpunkt $\mathbf{t_0}$ bezeichnet.

!

1.2. Differenzenquotienten

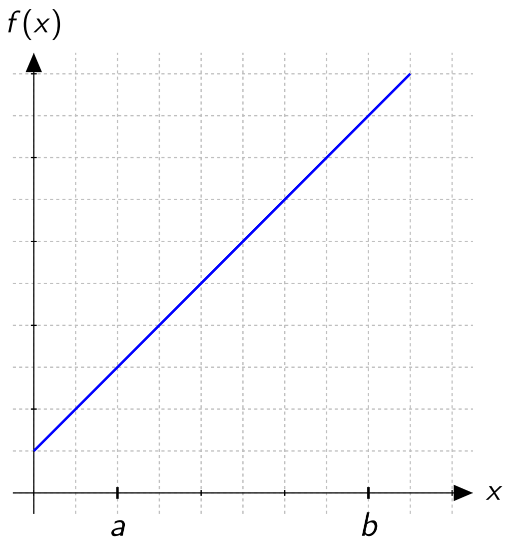
1.2.1. Differenzenquotienten als Sekantensteigung

!

Es sei $\mathbf{f}: \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $[\mathbf{a}; \mathbf{b}] \subseteq \mathbb{A}$. Die Zahl $\frac{\mathbf{f(b)-f(a)}}{\mathbf{b-a}}$ heißt

oder von $\mathbf{f}$ in $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$

Lineare Funktion

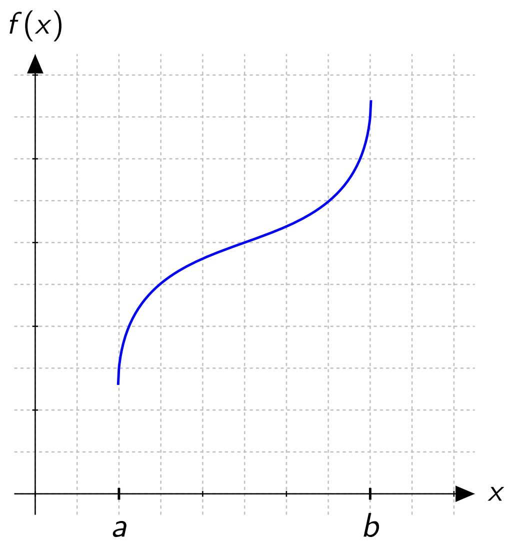


!

Der einer mit $\mathbf{f(x) = k \cdot x + d}$

ist in jedem Intervall $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$ gleich der

Funktion (allgemein)



Der einer im Intervall $[\mathbf{a};\mathbf{b}]$ ist gleich der

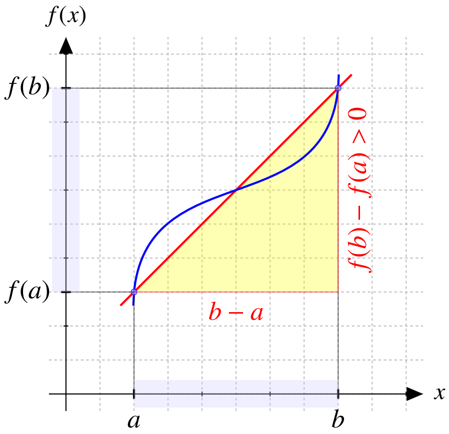
von $\mathbf{f}$ in $[\mathbf{a};\mathbf{b}]$.

!

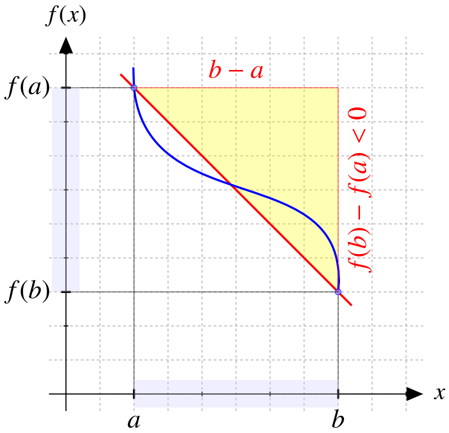
Ist die Funktion nicht linear in $[\mathbf{a};\mathbf{b}]$, so nennen wir die lineare Funktion $\mathbf{s}$ mit $\mathbf{s}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ und $\mathbf{s}(\mathbf{b}) = \mathbf{f}(\mathbf{b})$ die Sekantenfunktion von $\mathbf{f}$ in $[\mathbf{a};\mathbf{b}]$. Die Steigung $\mathbf{k}$ der Sekantenfunktion bezeichnet man auch als mittlere Steigung von $\mathbf{f}$ in $[\mathbf{a};\mathbf{b}]$.

Im Intervall $[\mathbf{a};\mathbf{b}]$ kann die Steigung der Funktion $\mathbf{f}$ an manchen Stellen kleiner als die Steigung der Sekantenfunktion $\mathbf{s}$, an anderen Stellen größer sein. Im Mittel hat $\mathbf{f}$ jedoch im Intervall die Steigung $\mathbf{k}$ der Sekantenfunktion.

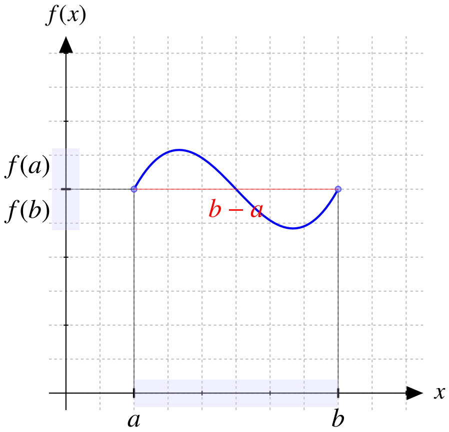
1.2.2. Vorzeichen Differenzenquotienten



f steigt im Mittel in $[a;b]$

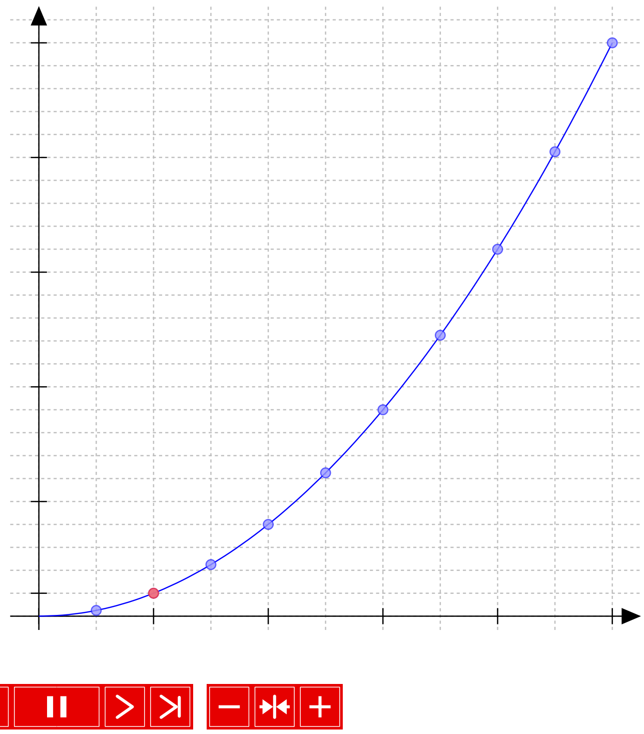


f fällt im Mittel in $[a;b]$



f bleibt im Mittel in $[a;b]$ gleich

1.3. Differentialquotient



Es sei $\mathbf{f}: \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $[\mathbf{a};\mathbf{b}] \subseteq \mathbb{A}$. Der Grenzwert

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{z}\to\mathbf{x}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{z}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{z} - \mathbf{x}}$$

heißt von f an der Stelle x oder von $\mathbf{f}$ an der Stelle x.

Der einer mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d}$ ist an jeder Stelle $\mathbf{x}$ gleich der

1.3.1. Differenzialquotient als Tangentensteigung

Eine ist eine Gerade, die eine gegebene Kurve in bestimmten Punkt berührt. Die Tangente ist die beste lineare Annäherung für eine Kurve.

Eine ist eine Gerade, die durch verschiedene Punkte einer Kurve geht.

Eine ist eine Gerade, die einen gegebenen Kreis in einzigen Punkt berührt bzw. schneidet.

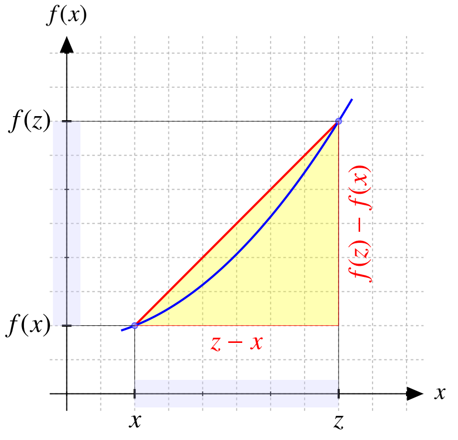
1.3.2. Neigungswinkel einer Tangente

Wir betrachten eine Funktion f im Intervall [x; z]:

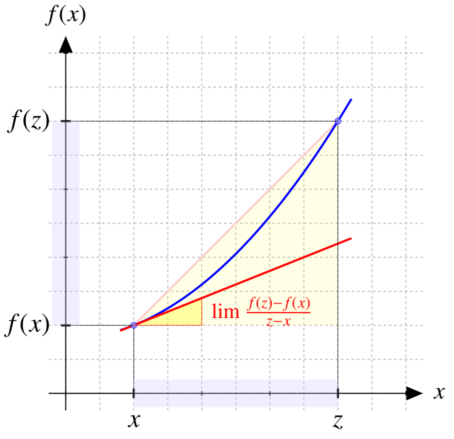
!

Es sei f eine reelle Funktion und $\mathbf{f'(x)}$ ihr Differentialquotient an der Stelle $\mathbf{x}$. Die Gerade druch den Punkt $\mathbf{X} = (\mathbf{x}|\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ mit der Steigung $\mathbf{f'(x)}$ bezeichnet man als an den Graphen von $\mathbf{f}$ $\mathbf{X}$. Die Steigung $\mathbf{f'(x)}$ heißt auch $\mathbf{f}$ $\mathbf{x}$.

Sekante



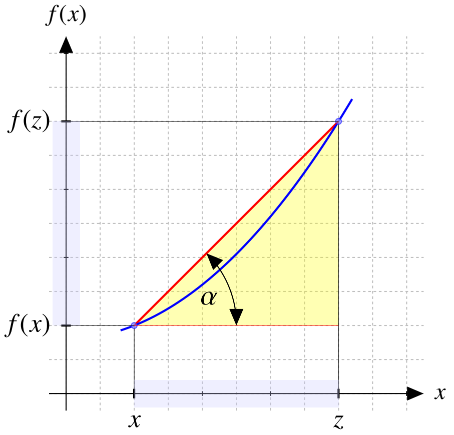
Tangente



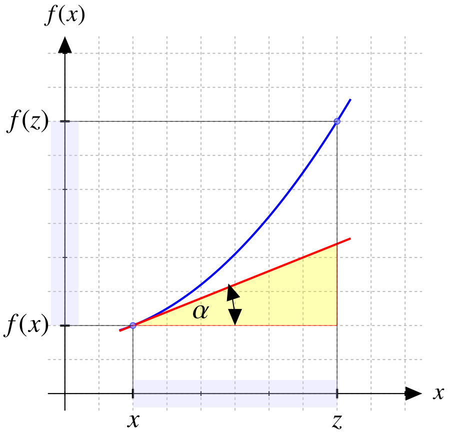
Steigung der Sekante

Steigung der Grenzgerade (Tangente)

Steigungswinkel der Sekante



Steigungswinkel der Tangente



1.4. Ableitungsregeln für Polynomfunktionen

Die Funktion $f' : x \mapsto f'(x)$ nennt man oder kurz . Das Berechnen der Ableitungsfunktion nennt man oder .

!

1.4.1. Ableitung einer konstanten Funktion ($\mathbf{c} \in \mathbb{R}$)

1.4.2. Potenzregel für natürliche Exponenten ($\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$)

1.4.3. Regel vom konstanten Faktor ($\mathbf{c} = \text{konstant}$)

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

1.4.4. Summenregel

Eine Summe darf gliedweise differenziert werden.

1.4.5. Allgemeine Summenregel

Die Summenregel gilt auch für mehr als zwei Summanden.

1.5. Höhere Ableitungen

!

Es sei f eine reelle Funktion. Man bezeichnet:

- ☐ $\mathbf{f}'$ als von $\mathbf{f}$
- ☐ $\mathbf{f}''$ als von $\mathbf{f}$ mit $\mathbf{f}'' = (\mathbf{f}')'$
- ☐ $\mathbf{f}'''$ als von $\mathbf{f}$ mit $\mathbf{f}''' = (\mathbf{f}'')'$

2. Untersuchung von Polynomfunktionen

Die Schülerinnen und Schüler ...

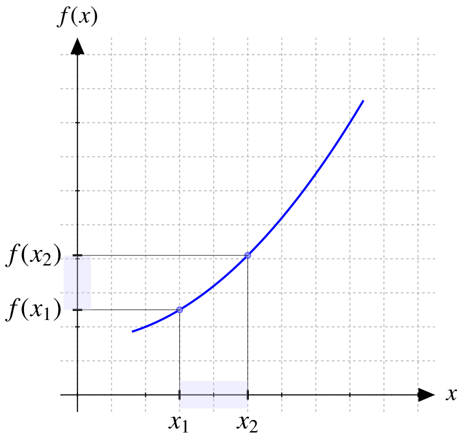
- kennen ...
- können ...

2.1. Monotonie

2.1.1. Monotonie

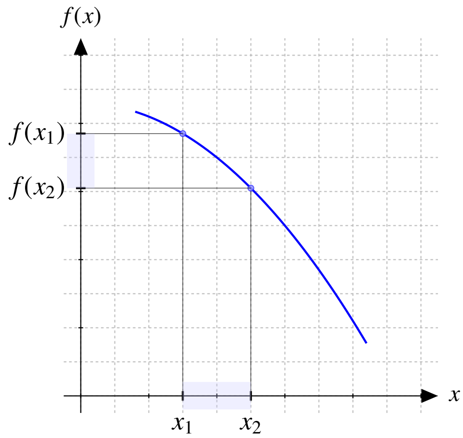
Es sei $\mathbf{f} : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $\mathbb{M}$ eine Teilmenge von $\mathbb{A}$ d.h. $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{A}$. Die Funktion $\mathbf{f}$ heißt

Streng monoton steigend in M



wenn für alle $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbf{M}$
und $\mathbf{x_1} < \mathbf{x_2}$ gilt:

Streng Monoton fallend in M



wenn für alle $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbf{M}$
und $\mathbf{x_1} < \mathbf{x_2}$ gilt:

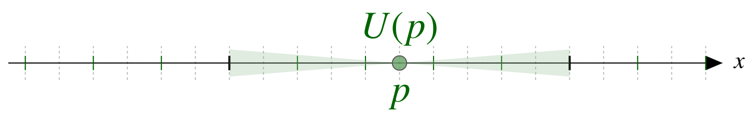
Monoton steigend in M

wenn für alle $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbf{M}$
und $\mathbf{x_1} < \mathbf{x_2}$ gilt:

Monoton fallend in M

wenn für alle $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbf{M}$
und $\mathbf{x_1} < \mathbf{x_2}$ gilt:

2.1.2. Umgebung U der Stelle p



!

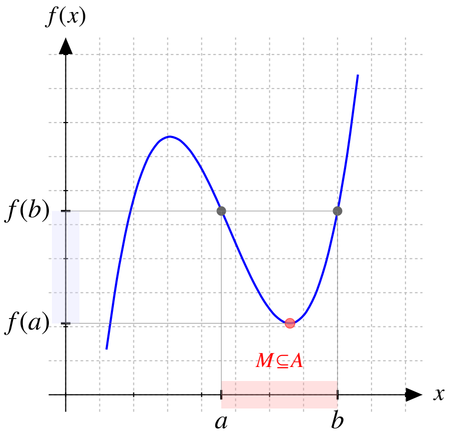
Unter einer $U(p)$ der Stelle p verstehen wir dabei ein , welches p als innere Stelle enthält. p ist des Intervalls.

2.2. Extremstellen von Funktionen

2.2.1. Extremstellen von f in $\mathbb{M}$

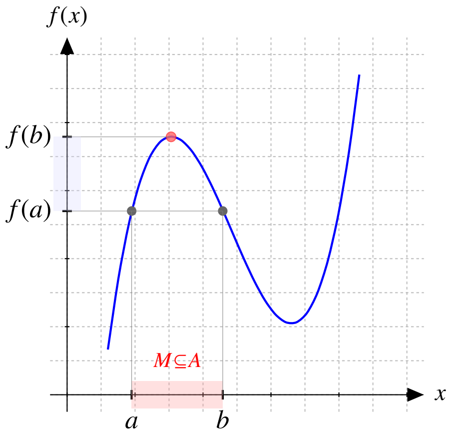
Es sei $\mathbf{f} : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $\mathbb{M}$ eine Teilmenge von $\mathbb{A}$ d.h. $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{A}$. Eine Stelle $p \in M$ heißt

Minimumstelle von f in $\mathbb{M}$



wenn für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ gilt:

Maximumstelle von f in $\mathbb{M}$

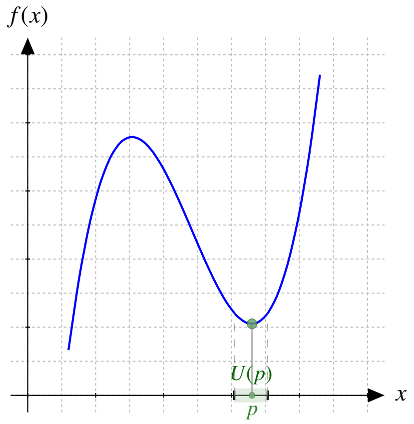


wenn für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ gilt:

2.2.2. Lokale Extremstellen von f

Es sei $\mathbf{f} : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion . Eine Stelle $p \in \mathbb{A}$ heißt

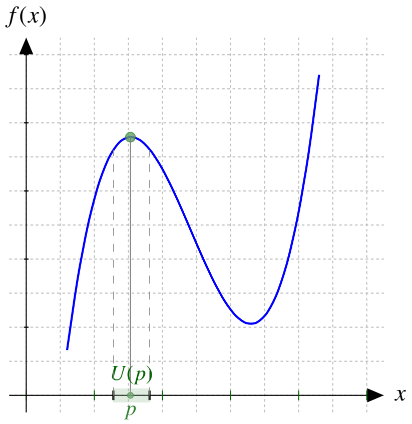
Lokale Minimumstelle von f



wenn es eine Umgebung $\mathbb{U}(p) \subseteq A$ gibt, sodass p Minimumstelle von f in $\mathbb{U}(p)$ ist,

d.h. wenn für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$ gilt:

Lokale Maximumstelle von f



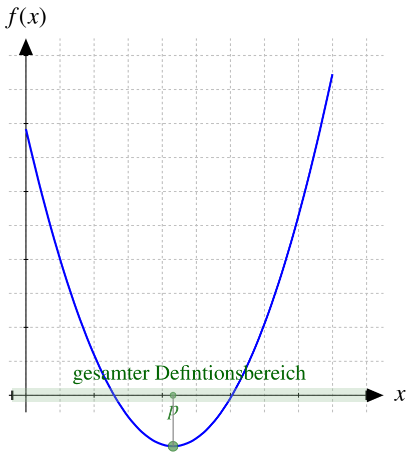
wenn es eine Umgebung $\mathbb{U}(p) \subseteq A$ gibt, sodass p Maximumstelle von f in $\mathbb{U}(p)$ ist,

d.h. wenn für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$ gilt:

2.2.3. Globale Extremstellen von f

Es sei $\mathbf{f} : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion . Eine Stelle $p \in \mathbb{A}$ heißt

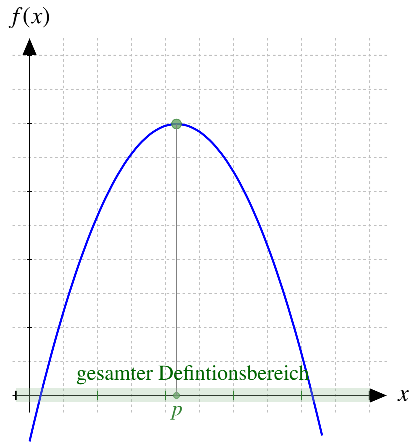
Globale Minimumstelle von f



wenn p Minimumstelle von f im gesamten Definitionsbereich $\mathbb{A}$ ist,

d.h. wenn für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{A}$ gilt:

Globale Maximumstelle von f



wenn p Maximumstelle von f im gesamten Definitionsbereich $\mathbb{A}$ ist,

d.h. wenn für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{A}$ gilt:

2.3. Funktionsverlauf und erste Ableitung

2.3.1. Einführendes Beispiel

Beispiel 7.1: Einführendes Beispiel

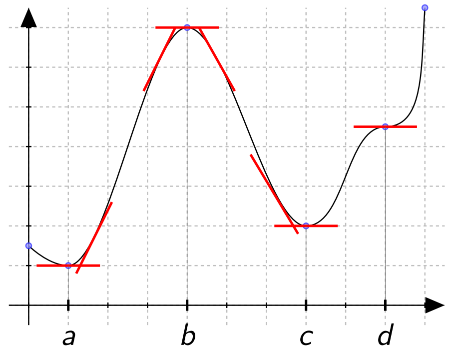
Es ist eine Polynomfunktion f wie folgt dargestellt und es sind einige Tangenten eingezeichnet. Untersuche ob zwischen Tangentensteigung und dem Funktionsverlauf f ein Zusammenhang besteht

a im Intervall $[a; b]$

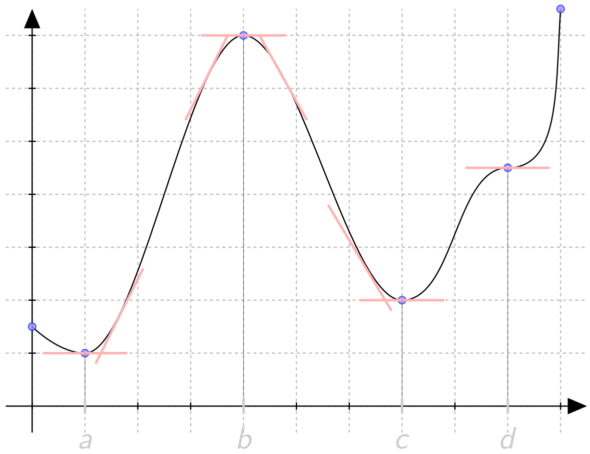
b im Intervall $[b; c]$

c an der Stelle b

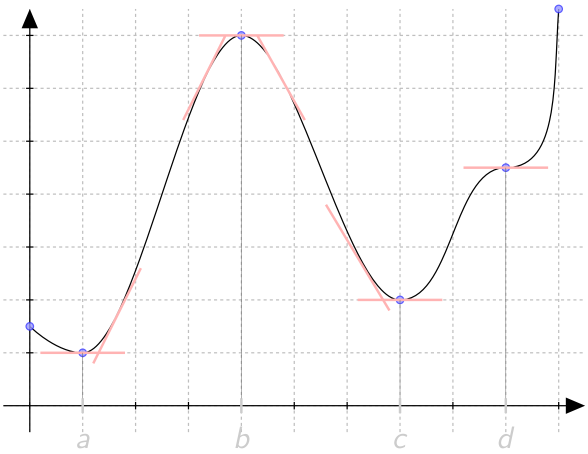
d an der Stelle d



a im Intervall $[a; b]$



b im Intervall $[b; c]$



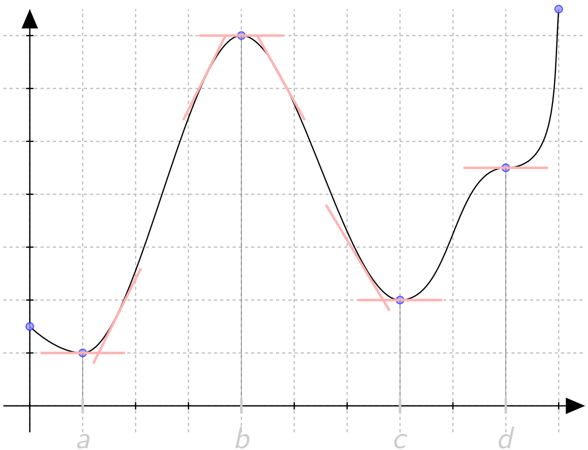
2.3.2. Monotoniesatz

!

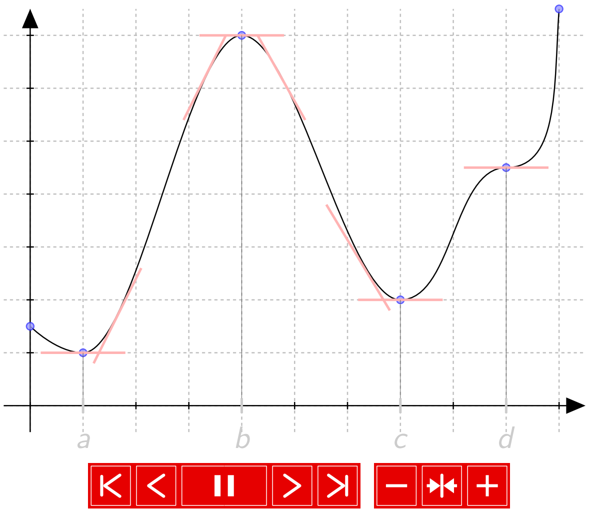
Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion und $I \subseteq \mathbb{A}$ ein Intervall. Dann gilt:

- für alle innere Stellen $x \in I \Rightarrow f$ streng monoton in I
- für alle innere Stellen $x \in I \Rightarrow f$ streng monoton in I

c an der Stelle b



d an der Stelle *d*



2.3.3. Notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Extremstellen

Im Beispiel stellten wir fest, dass an jeder lokalen Extremstelle **p** von **f** die Tangente parallel zur 1. Achse (x-Achse) und somit $\mathbf{f'(p) = 0}$ sein muss.

Ist **p** eine lokale Extremstelle einer Polynomfunktion f, dann ist $\mathbf{f'(p) = 0}$.

!

Anderseit gilt für die Stelle **d** zwar auch $\mathbf{f'(p) = 0}$, trotzdem ist **d** keine lokale Extremstelle von **f**. Diese Bedingung ist zwar notwendig aber noch nicht hinreichend. Ob eine Stelle tatsächlich eine lokale Extremstelle von **f** ist kann durch das Monotonieverhalten in seiner Umgebung festgestellt werden.

Ändert eine Polynomfunktion **f** an der Stelle **p** das Monotonieverhalten, dann ist **p** eine lokale Extremstelle von **f**.

!

2.3.4. Aufgaben

2.4. Untersuchung von Polynomfunktionen mit Hilfe höherer Ableitungen

2.4.1. Krümmung

2.4.2. Eine weitere hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen

2.4.3. Symmetrie von Polynomfunktionen

2.4.4. Verhalten einer Funktion fur $x \to \pm\infty$

2.4.5. Tyische Formen der Graphen von Polynomfunktionen

2.5. Vermischte Aufgaben zur Untersuchung von Polynomfunktionen

2.6. Aufsuchen von Polynomfunktionen

2.6.1. Umkehraufgabe zur Untersuchung von Polynomfunktionen

2.6.2. Herleitung der Bedingungen (Gleichungssystem)

Dipl.-Ing. Edgar Neuherz | E-Mail: edgar.neuherz@me.com

2.7. Extremwertaufgaben

2.7.1. Einführendes Beispiel

Beispiel 10.1: Einführendes Beispiel

Welches Rechteck vom Umfang 100 hat den größten Flächeninhalt?

a Skizzieren des Problems

b Lösen durch Probieren

c Ist exakte Berechnung der Lösung möglich?

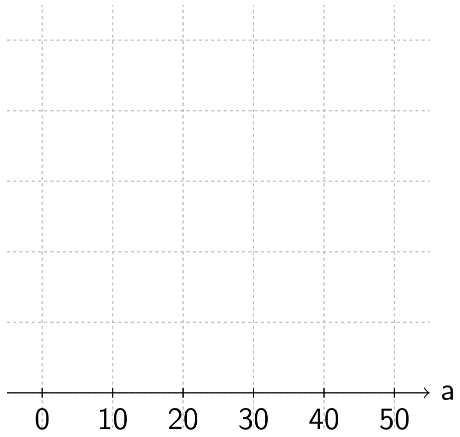
a Skizzieren des Problems

Um eine solche Aufgabe zu lösen ist es sinnvoll sich zu überlegen, was variiert werden kann. In diesem Beispiel wird gefordert, dass der Umfang 100 ist. Über die Seitenlänge wird keine Aussage getroffen, d.h. diese können variiert werden.

b Lösen durch Probieren

Wir probieren einfach verschiedene Seitenlängen für a. Wird die Seite a läger, wird die Seite b kürzer (Summe 50).

a	b	A

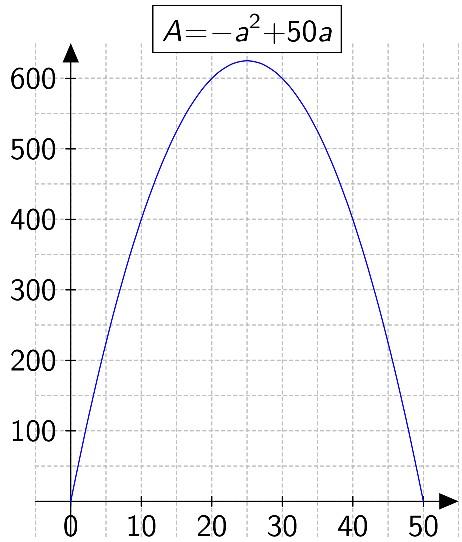


c Ist exakte Berechnung der Lösung möglich?

Flächeninhalt des Rechtecks

$$A = a \cdot b$$

d Kurvenuntersuchung (Globale Maximumstelle)



2.7.2. Vorgehen bei der Lösung einer Extremwertaufgabe

Eine Aufgabe, in der ein Maximum oder Minimum einer Funktion gesucht wird, nennt man Extremwertaufgabe. Dabei geht es darum, eine bestimmte Größe (Zielgröße) unter vorgegebenen Bedingungen möglichst groß oder möglichst klein zu machen. Folgende Schritte helfen eine Extremwertaufgabe zu lösen:

1. Welche Zielgröße soll minimal oder maximal werden?
2. Zielgröße als Funktion mehrerer Variablen anschreiben
3. Nebenbedingung(en) suchen und anschreiben
4. Variablen mit Hilfe der Nebenbedingunen eliminieren
5. Zielfunktion als Funktion einer Variable anschreiben
6. 1 Ableitung der Zielfunktion herleiten (ev. vereinfachen)
7. Extremstellen berechnen und mit Randstellen vergleichen

2.7.3. Vereinfachen der Zielfunktion durch Weglassen eines konstanten Faktors

2.7.4. Vereinfachen der Zielfunktion durch Quadrieren

2.7.5. Extremstellen am Rand eines Intervalls

2.7.6. Aufgaben

3. Untersuchung weiterer Funktionen

Die Schülerinnen und Schüler ...

- kennen ...
- können ...

3.1. Summen- und Faktorregel

3.1.1. Summenregel

3.1.2. Faktorregel

3.2. Produktregel

3.3. Quotientenregel

3.4. Untersuchung rationaler Funktionen

3.4.1. Definition

3.4.2. Polstelle

3.5. Ableitung elementarer Funktionen

3.5.1. Ableitung von Exponentialfunktionen

3.5.2. Ableitung der Sinus- und Cosinusfunktion

3.5.3. Ableitung der Quadratwurzelfunktion

3.6. Die Kettenregel

3.6.1. Einleitendes Beispiel

3.6.2. Ableitung einer Verkettung

3.7. Ableitung von Umkehrfunktionen

3.7.1. Umkehrregel

3.7.2. Aufgaben

4. Kosten- und Preistheorie

Die Schülerinnen und Schüler ...

- kennen ...
- können ...

4.1. Bezeichnungen

In der Wirtschaftsmathematik werden folgende Bezeichnungen verwendet:

- ME : Mengeneinheiten (z.B. 1 t, 100 kg, 1 Dutzend, ...)
- GE : Geldeinheiten (z.B. 10 €, 10 CHF, 10 $, ...)
- ZE : Zeiteinheiten (z.B. 1 Woche, 1 Monat, ...)

4.2. Preistheorie

Der Markt ist jener Ort, in dem ein Gut angeboten und verkauft wird. Anbieter und Nachfrager eines Gutes verfolgen unterschiedliche Interessen. Die Anbieter wollen einen möglichst großen Gewinn erzielen, die Nachfrager einen möglichst geringen Preis zahlen.

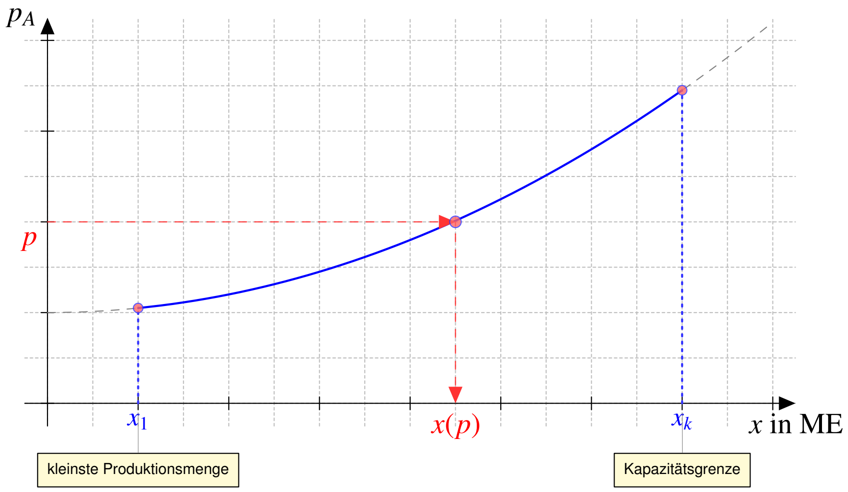
Durch Zusammentreffen beider Interessen bildet sich der Preis eines Gutes. Je nach Marktformen und anderen Mechanismen der Marktwirtschaft können Modelle für die Preisentwicklung erstellt werden.

4.2.1. Angebotsfunktion

Der Preis ist Anreiz für den Produzenten, von einem Gut eine größere Menge zu erzeugen. Die angebotene Menge x eines Produktes ist vom Preis p des Produktes abhängig. Die Angebotsfunktion p_A gibt den Zusammenhang zwischen (Markt)preis und angebotener Menge an.

! Je größer die werden soll, um so muss der

einer Ware sein.



Dadurch ist die Funktion $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{p})$ definiert.

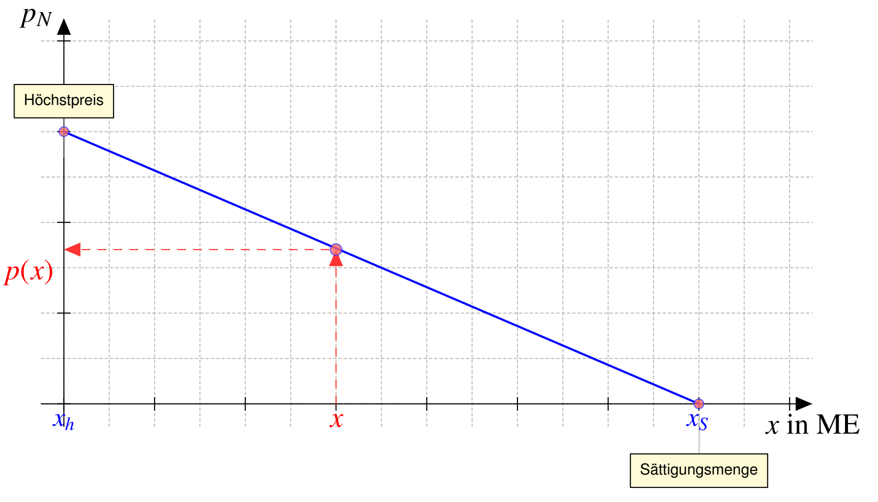
Achtung: Es ist üblich, den Preis in Abhängigkeit von der angebotenen Menge x darzustellen, d.h. $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{p}(\mathbf{x})$.

4.2.2. Nachfragefunktion

Die Absatzmenge eines Gutes hängt vom Verkaufspreis p_N ab. Soll eine größere Menge eines Produktes verkauft werden, so muss der Preis dafür sinken.

Jeder nachgefragten entspricht ein bestimmter .

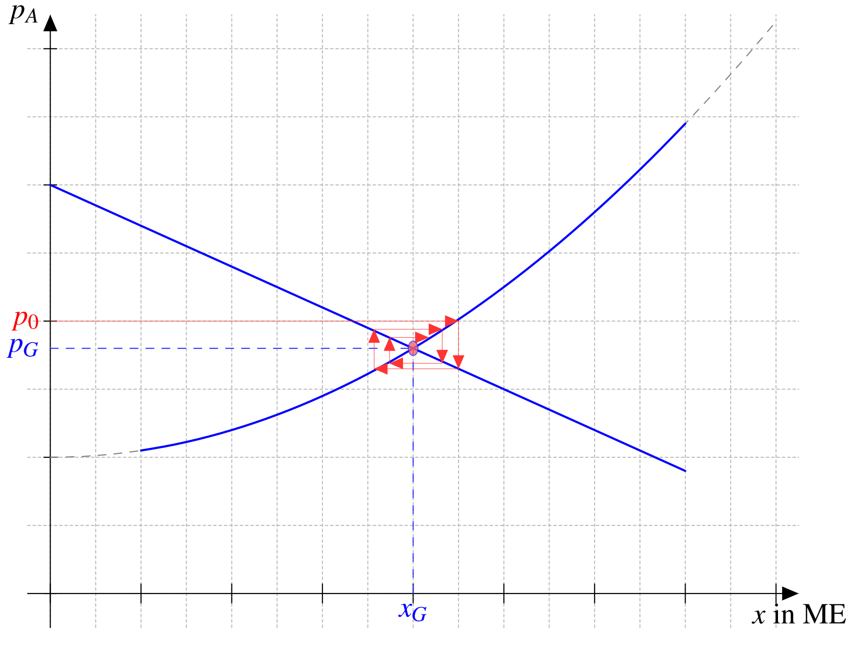
!



Die Zuordnung nachgefragter Menge x zu einem Preis p_N ($\mathbf{x} \mapsto \mathbf{p_N(x)}$) nennen wir Nachfragefunktion, ihren Grafen Nachfragekurve.

4.2.3. Marktpreis

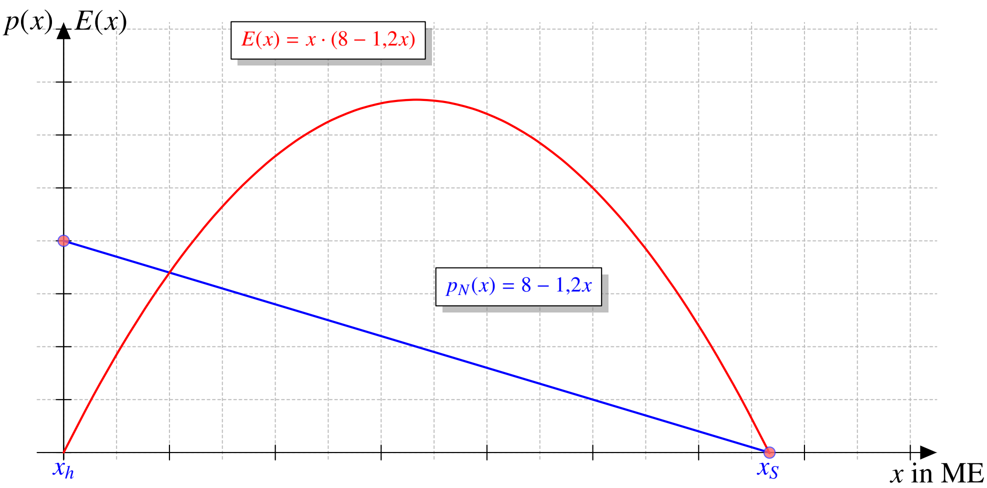
Das Aufeinandertreffen von Anbietern und Nachfragern wird als Markt bezeichnet. Bei freier Entscheidungsmöglichkeit stellt sich für Angebot und Nachfrage ein Gleichgewichtspreis, der Marktpreis p_G ein.



4.3. Erlös

4.3.1. Erlösfunktion

! Die ergibt sich aus dem Produkt von abgesetzter und dem zugehörigen .



4.3.2. Verlauf der Erlösfunktion

Der Verlauf der Erlösfunktion hängt von der Nachfragefunktion ab:

- Konstanter Nachfragepreis p: : Bei konstantem Preis gilt: $E(x) = x \cdot p$
- Variabler Nachfragepreis $p_N(x)$: Bei variablen Preis gilt: $E(x) = x \cdot p_N(x)$

4.3.3. Erlösmaximierung

! Für die Menge $\mathbf{x_E}$, bei welcher der Erlös ist, gilt: $\mathbf{E'(x) = 0}$.

4.4. Kostenrechnung

Aufgabe der Wirtschaftsmathematik ist es, wichtige Zusammenhänge in einer Marktwirtschaft zu untersuchen.

4.4.1. Bezeichnungen

Die erste Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ heißt von f.

!

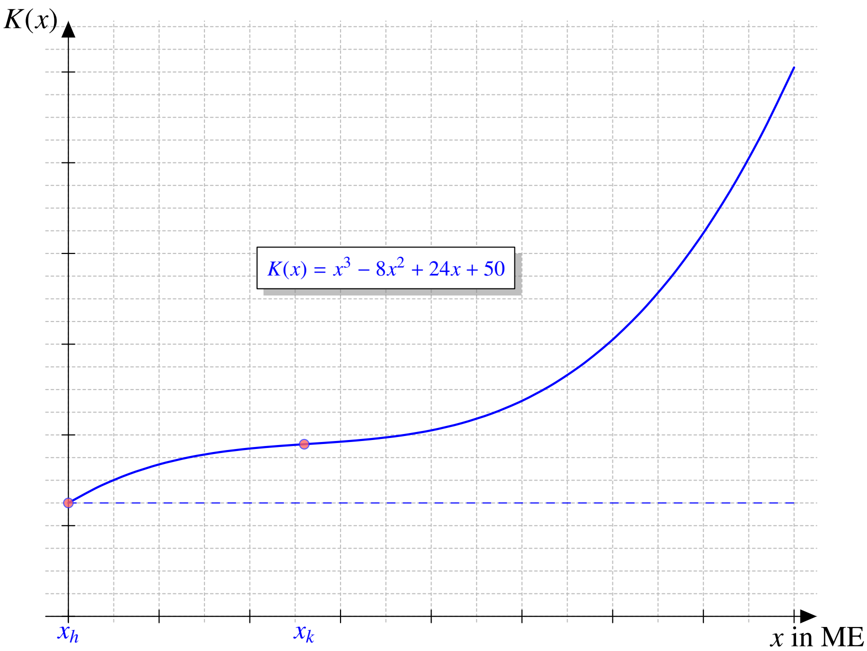
$K'(x)\ldots$ Grenzkosten!
$E'(x)\ldots$ Grenzerlös!
$G'(x)\ldots$ Grenzgewinn!

4.4.2. Gesamtkosten

Die sind der Gesamtbetrag, der zur Herstellung von einer Ware erforderlich ist.

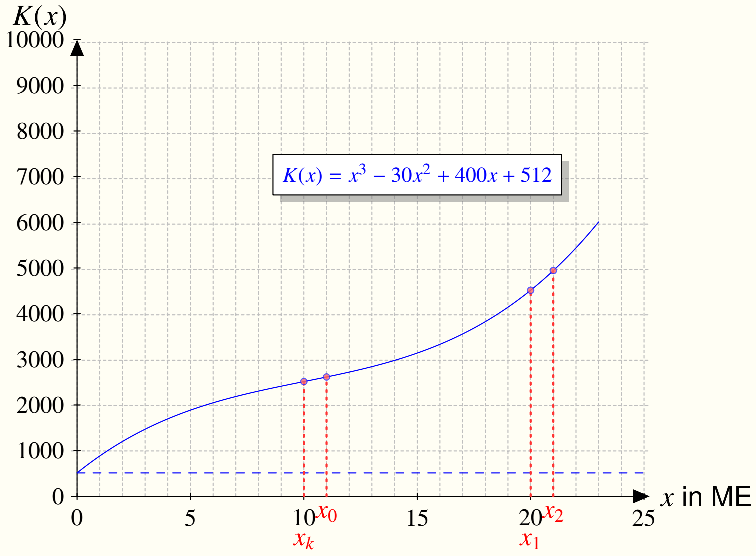
!

$$K(x) = K_v(x) + K_{fix}$$



S 134

Beispiel 1.1: Gesamtkostenfunktion



Gegeben ist eine etragsgesetzliche Gesamtkostenfunktion $K(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 512$.

a Ermittle die Grenzkostenfunktion

Die Gesamtkostenfunktion ist eine kubische Funktion. Beim Ableiten wird der Grad der Funktion um eins reduziert, d.h. die Grenzkostenfunktion ist eine Quadratische Funktion.

$$K(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 512$$
$$K'(x) = 3x^2 - 60x + 400$$

b Welchen Wert hat die Kostenkehre?

Die notwendige Bedingung für die Kostenkehre (Wendepunkt) ist, das die zweite Ableitung gleich 0 ist.

$$\begin{aligned} K'(x) &= 3x^2 - 60x + 400 \\ K''(x) &= 6x_K - 60 \\ 0 &= 6x_K - 60 \\ 6x_K &= 60 \\ x_K &= 10 \text{ ME} \end{aligned}$$

c Welche Kosten verursacht eine zusätzlich produzierte Einheit bei einer Produktion von 20 Einheiten, wie viel an der Kostenkehre (x_K)?

$\boxed{x_1 = 20,\ x_2 = 21}$

$$\Delta K = K(x_2) - K(x_1) = \\ = K(21) - K(20) = 431$$

$\boxed{x_K = 10,\ x_0 = 11}$

$$\Delta K = K(x_2) - K(x_K) = \\ = K(11) - K(10) = 101$$

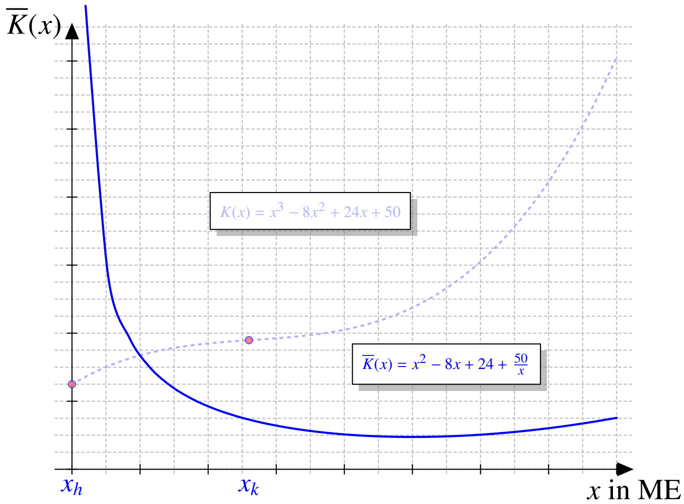
4.4.3. Stückkosten (Durchschnittskosten)

Dividiert man die Gesamtkosten $K(x)$ durch die Produktionsmenge x, erhält man die

.

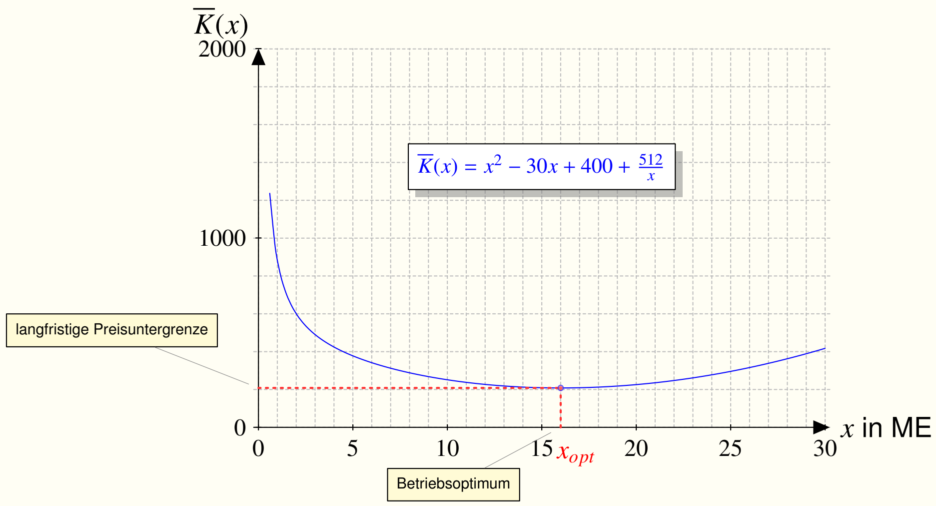
!

$$\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$$



Diese Stückkosten $\overline{K}(x)$ geben an, wie viel die Produktion einer einzigen Einheit im Durchschnitt kostet, wenn insgesamt x Mengeneinheiten produziert werden.

Beispiel 1.2: Kostengünstige Produktionsmenge



S 135

Gegeben ist die Gesamtkostenfunktion $K(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 512$.

a Für welche Produktionsmenge sind die Gesamtkosten pro Stück minimal?

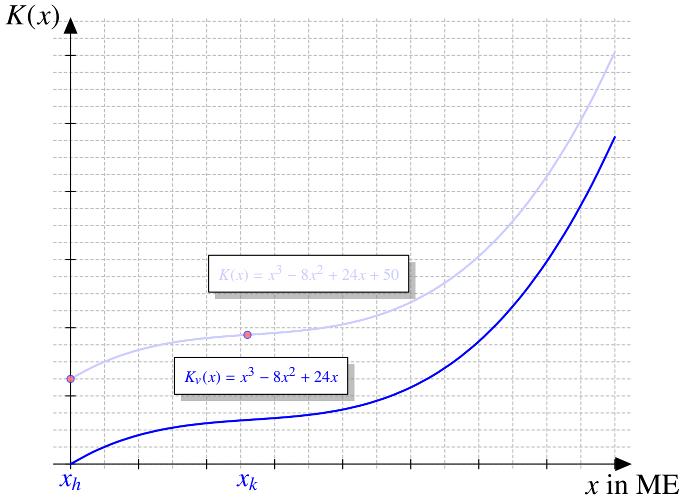
$$\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} \qquad \overline{K}'(x) = 2x - 30 - \frac{512}{x^2}$$

$$\overline{K}(x) = x^2 - 30x + 400 + \frac{512}{x} \qquad \overline{K}'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_{opt} = 16}$$

4.4.4. Variable Kosten

! Die sind die Gesamtkosten ohne Fixkosten

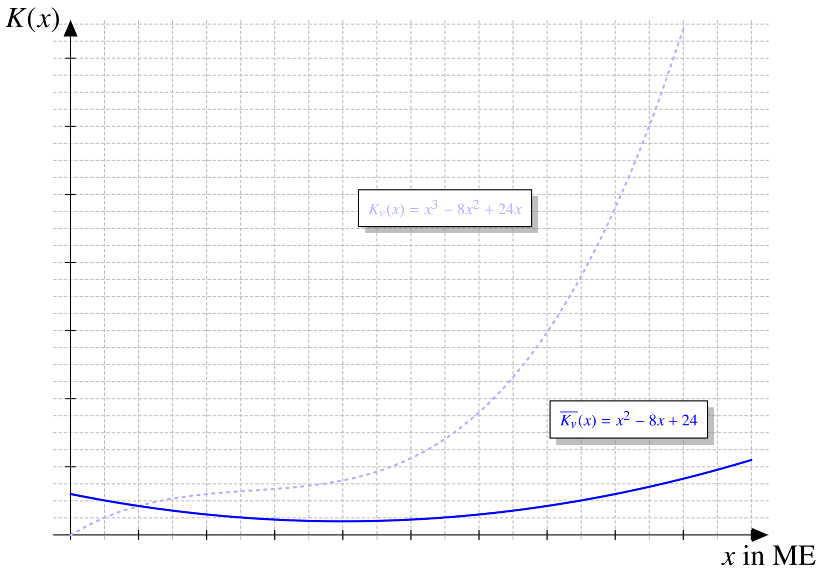
$$K(x) = \overbrace{K_v(x)}^{\text{variable Kosten}} + K_{fix}$$



4.4.5. Variable Stückkosten

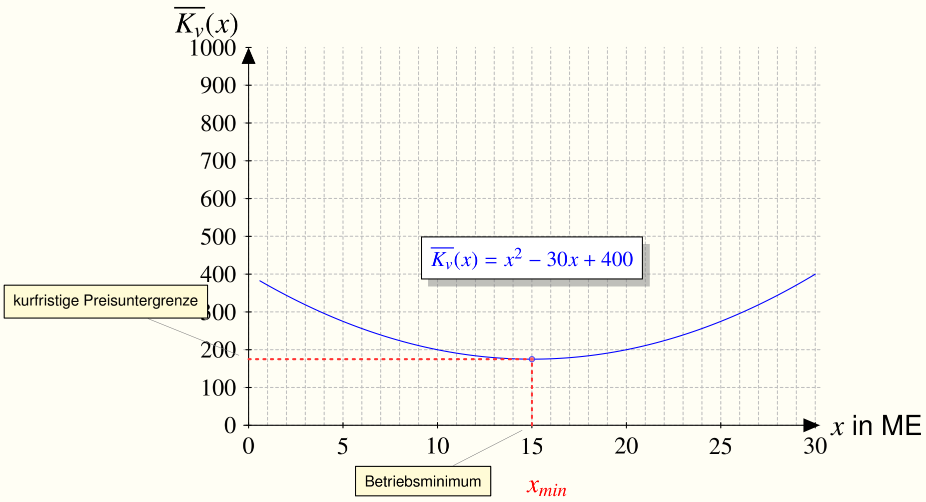
! Dividiert man die variablen Kosten $K_v(x)$ durch die Produktionsmenge x, erhält man die .

$$\overline{K_v}(x) = \frac{K_v(x)}{x}$$



S 137

Beispiel 1.3: Kostengünstige Produktionsmenge ohne Fixkosten



Gegeben ist die Gesamtkostenfunktion $K(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 512$.

a Für welche Produktionsmenge sind die variablen Kosten pro Stück minimal?

$$\overline{K_v}(x) = \frac{K_v(x)}{x}$$

$$\overline{K_v}(x) = x^2 - 30x + 400$$

$$\overline{K_v}'(x) = 2x - 30$$

$$\overline{K_v}'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{min} = 15$$

4.5. Gewinnmaximierung

Ein Unternehmen ist bestrebt seinen Gewinn zu maximieren. Dies gilt sowohl bei vollständiger Konkurrenz (Preis von der Konkurrenz vorgegeben, $p = const.$) als auch bei bei einem Monopol (monopolistische Konkurrenz, $p = f(x)$).

Unter besonderen Umständen ist es auch möglich nur die variablen Kosten zu berücksichtigen, d.h. anstatt mit dem Gewinn mit dem Deckungsbeitrag zu rechnen. Dann ist das Unternehmerziel fr̈ diesen Zeitraum den Deckungsbeitrag zu maximieren.

4.5.1. Gewinnmaximierung

Erlös

Gesamtkosten

Gewinn

Gewinn-Maximum (x_G)

$$G(x) = \text{MAX} \quad \Rightarrow \quad G'(x) = 0$$
$$G'(x) = E'(x) - K'(x) = 0$$

Betriebsoptimum

$$K(x) = \text{MIN} \quad \Rightarrow \quad K'(x_{opt}) = 0$$

Langfristige Preisuntergrenze

Cournot'sche Punkt

4.5.2. Deckungsbeitragmaximierung

Erlös

Variable Kostetn

Deckungsbeitrag

Deckungsbeitrag-Maximum (x_D)

$$D(x) = \text{MAX} \quad \Rightarrow \quad D'(x) = 0$$
$$D'(x) = E'(x) - K_v'(x) = 0$$

Betriebsminimum

$$K_v(x) = \text{MIN} \quad \Rightarrow \quad K_v'(x_{min}) = 0$$

Kurzfristige Preisuntergrenze

5. Grundbegriffe der Integralrechnung

Die Schülerinnen und Schüler ...

- ☐ kennen ...
- ☐ können ...

5.1. Stammfunktion und unbestimmtes Integral

5.1.1. Einführendes Beispiel I

5.2. Unter-, Ober- und Zwischensummen

5.2.1. Untersummen

5.2.2. Obersummen

5.2.3. Zwischensummen

5.3. Flächeninhalt und bestimmtes Integral

5.3.1. Flächeninhalt

5.4. Berechnung von Integralen mit Stammfunktionen

5.5. Flächen- und Volumsberechnungen